TD 9-10 : Primitives, intégrales, ED

Primitives

Exercice 1 (Trouver une primitive)**.** Déterminer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto xe^{-3x^2}$
2) $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$
3) $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
4) $x \mapsto \tan x$
5) $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$
6) $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$
7) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$
8) $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$
9) $x \mapsto \operatorname{th} x$
10) $x \mapsto \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$
11) $x \mapsto \cos x \sin^3 x$
12) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$
13) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$
14) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$
15) $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
16) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$
17) $x \mapsto \sin(2x)\cos^2 x$

Exercice 2 (Trouver toutes les primitives)**.** Déterminer *toutes* les primitives des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \sin(3x) \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{x^7} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \qquad h : x \mapsto \left|x^2-4x+3\right| \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Techniques d'intégration

Exercice 3 (Intégration par parties)**.** Calculer les intégrales suivantes par une IPP :

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \arctan x\,dx \qquad \mathcal{I}_2 = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx \qquad \mathcal{I}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt \qquad \mathcal{I}_4 = \int_0^{\pi} t^2\cos t\,dt$$

Exercice 4 (Intégrales de fractions rationnelles)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{x^2-4x+4}dx$
2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$
3) $\displaystyle\int_6^8 \frac{dt}{t^2-4t-5}$
4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{8x^2+50}$

Exercice 5 (Changement de variables)**.** En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$\displaystyle\mathcal{I}_1 = \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ en posant $u=\sqrt{x}$

$\displaystyle\mathcal{I}_2 = \int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$ en posant $z=\sqrt{x-2}$

$\displaystyle\mathcal{I}_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ en posant $t=\tan u$

$\displaystyle\mathcal{I}_4 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ en posant $u=\cos x$

$\displaystyle\mathcal{I}_5 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$ à vous de trouver

$\displaystyle\mathcal{I}_6 = \int_1^2 \frac{1}{e^{-x}+1}dx$ à vous de trouver

Exercice 6 (Équations et intégrales)**.**

1) On pose $\displaystyle\mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \sin x \operatorname{sh} x\,dx$. Faire deux intégrations par parties pour obtenir une équation sur $\mathcal{I}$. Calculer $\mathcal{I}$.
2) Pour tout $x>1$, on pose $\displaystyle\mathcal{I}(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,dt$. Par la même méthode, calculer $\mathcal{I}(x)$. En déduire une primitive de $t \mapsto \sin(\ln t)$ sur $]0,+\infty[$.

Règles de Bioche

On suppose qu'on souhaite calculer une intégrale de la forme $\int_a^b R(\cos x, \sin x)dx$, où R est une fonction rationnelle (cf exercices 7 et 8 pour des exemples). Les règles de Bioche permettent de trouver un changement de variables qui, **s'il est licite**, permettra de calculer l'intégrale. On regarde pour cela l'expression

$$w(x) := R(\cos x, \sin x)dx$$

- Si $w(x) = w(-x)$, alors on peut poser $t = \cos x$. avec la règle $d(-x) = -dx$
- Si $w(x) = w(\pi - x)$, alors on peut poser $t = \sin x$. avec la règle $d(\pi - x) = -dx$
- Si $w(x) = w(\pi + x)$, alors on peut poser $t = \tan x$. avec la règle $d(\pi + x) = dx$
- Dans tous les cas, on peut poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ et on utilise les formules d'angle moitié.

Exercice 7 (Règles de Bioche)**.** En utilisant les règles de Bioche, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos^3 x\, dx$ 3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx$ 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx$

Exercice 8. En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx$ 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$

À vous de jouer

Exercice 9 (Calcul d'intégrales)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{1-x^2}dx$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta$

3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x\, dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

6) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{4x}\cos(3x)dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^3 x\, dx$

8) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ix}\sin x\, dx$

9) $\displaystyle\int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$

10) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$

11) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

12) $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t-z}$ avec $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases}$

Exercice 10 (Intégrales de Wallis)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
3) En déduire la valeur de I_n.

Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 11 (ED linéaires d'ordre 1)**.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $y' + y = -1$
2) $y' + y = e^x$
3) $\begin{cases} y' + y = \dfrac{1}{1+e^x} \\ y(\ln 2) = 0 \end{cases}$
4) $y' - y = 1 + e^x$
5) $y' - 2y = e^x \cos(2x)$
6) $\begin{cases} y' - 2xy = -(2x-1)e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$
7) $(1+e^x)y' + e^x y = 0$
8) $(1+x^2)y' + 2xy = -1$
9) $\begin{cases} y' + \arctan(\sqrt{1+e^x})y = 0 \\ y(\pi e^{-1}) = 0 \end{cases}$

Exercice 12 (ED linéaires d'ordre 1, bis)**.** Résoudre les équations suivantes sur un intervalle I convenable (s'il y en a plusieurs, choisissez-en un) :

1) $xy' - 2y = 4\ln x$
2) $2xy' + y = \dfrac{1}{x}$
3) $\begin{cases} y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = e^{\arccos x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$
4) $\begin{cases} y' - \tan(x)y = 1 \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

Exercice 13 (ED avec raccord)**.** On considère l'équation $(E) : xy' + y = 0$.

1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
2) Peut-on trouver une solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14 ($\star$)**.** Soit a, b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'ED

$$(E) : \quad y' + a(t)y + b(t)y^2 = 0$$

1) Soit y une solution qui n'est pas identiquement nulle. Montrer que y ne s'annule jamais.
2) En posant $z = \dfrac{1}{y}$, se ramener à une équation linéaire en la fonction z.
3) Résoudre l'équation (E).

Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 15 (ED linéaires d'ordre 2)**.** Résoudre les équations suivantes :

1) $4y'' + 8y' + 5y = 2e^x$
2) $y'' - 5y' + 4y = e^x$
3) $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$
4) $y'' + 4y = 3\cos^2 x$
5) $y'' + iy' = x + 3$
6) $y'' + 3y' - 4y = ix^2$

Exercice 16 (Problème de Cauchy d'ordre 2)**.** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1) $\begin{cases} y'' + 4y = \cos(3x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
2) $\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

Exercice 17 (ED déphasée)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(\lambda - x)$$

1) Montrer que si f vérifie cette condition, alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant cette condition.